FUNGSI KOMPLEKS

TRANSFORMASI PANGKAT

Makalah

Untuk Memenuhi Tugas Mata Kuliah Fungsi Kompleks

yang diampuh Oleh Ibu Indriati N.H

Kelompok 6:

1. Amalia Ananingtyas (309312417513)
2. Pratiwi Dwi Warih S (309312417506)
3. Prisca Abiyani (309312422763)
4. Umi Hayik R L (408312409120)

Universitas Negeri Malang

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Jurusan Matematika

November 2011

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam analisis kompleks diperkenalkan beberapa transformasi elementer,yaitu tranformasi linier (sebagai gabungan dari rotasi, kontraksi, dan translasi), transformasi pangkat (yang akan kita bahas dalam makalah ini), transformasi bilinear transformasi kebalikan beserta sifat-sifat pemetaan karakteristik untuk transformasi eksponensial, sin z, cos z. Pemahaman tentang konsep transformasi elementer diperlukan dalam membantu menganalisis suatu kurva secara geometris.

Istilah transformasi dapat diartikan sebagai fungsi atau pemetaan. Sebagaimana diketahui, *fungsi* dari himpunan A ke himpunan B diartikan sebagai suatu aturan yang mengkaitkan setiap unsur di A dengan suatu unsur di B secara tunggal. Misalkan suatu fungsi f memetakan (mengkaitkan) z_0 $\in B \subseteq C$ disebut peta / bayangan dari z_0 dibawah f. Berdasarkan definisi fungsi, maka suatu titik $w \in B$ dimungkinkan mempunyai lebih dari satu prapeta. Sebagai contoh, titik $w_0 = 3$ mempunyai prapeta $z_1 = i$ dan $z_2 = -i$ di bawah fungsi $w = f(z) = z^2 + 4$.

Suatu fungsi f dapat dikatakan *satu-satu (injektif)* jika di setiap titik berbeda pada domain f mempunyai peta titik yang berbeda. Dengan kata lain, f adalah fungsi satu-satu apabila $z_1 \neq z_2 (z_1, z_2 \in D_f)$ mengakibatkan $f(z_1) \neq f(z_2)$. Sebaliknya, fungsi yang tidak memenuhi syarat tersebut, dikatakan *banyak-satu.*

1.2 Perumusan Masalah

1. Bagaimana sifat-sifat pemetaan pada transformasi pangkat ?
2. Apa saja contoh dan non-contoh dari transformasi pangkat?

1.3 Tujuan Penulisan

1. Mengetahui sifat-sifat pemetaan pada transformasi pangkat sehingga dapat diterapkan pada soal-soal yang berkaitan dengan transformasi pangkat.
2. Mengetahui apa saja contoh dan non-contoh transformasi pangkat sehingga dapat memudahkan dalam pengerjaannya.

BAB II

PEMBAHASAN

Definisi. Suatu fungsi dengan $f(z) = z^n$ dengan $n \in \mathbb{N}$ dinamakan fungsi pangkat.

Catatan :

1. Fungsi f tersebut merupakan fungsi menyeluruh, karena $f'(z) = nz^{n-1}, \forall z \in \mathbb{C}$.
2. Untuk $n > 1$, fungsi f bukanlah fungsi satu-satu sehingga tidak mempunyai fungsi invers.

Contoh: $w = z^2$

Non contoh: $w = z^{1/2}$ karena ½ ∉ ℕ.

Sifat-sifat pemetaan tertentu pada transformasi pangkat

$$w = z^n, \quad n = 2,3,4,\ldots$$

Fungsi $w = z^n$ dapat dinyatakan dalam bentuk kutub yaitu,

$$w = r^n(\cos n\theta + i\ \sin n\theta) = r^n\ cis\ n\theta \text{ dengan } z = r\ cis\ \theta \tag{1}$$

Dari sana kita melihat dengan mudah bahwa jika

$$|z| = r \text{ dan} \arg\ z = \theta$$

Maka

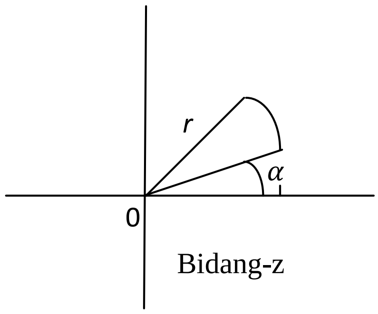
$$|w| = r^n \text{ dan} \arg\ w = n\theta$$

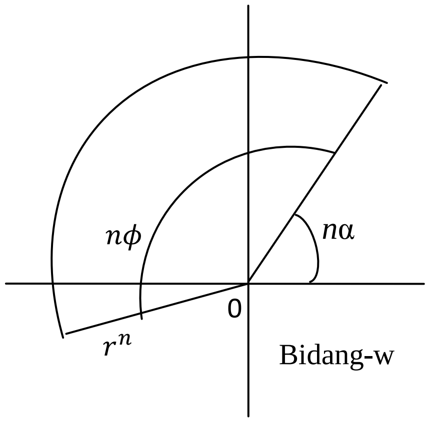
Dengan kata-kata,

Transformasi pangkat memetakan suatu tititk z dengan modulus r dan argument θ ke suatu titik dengan modulus r^n dan argument $n\theta$.

Sebagai contoh, di bawah $w = z^3$ dengan $z = 2\ cis\ \left(\frac{\pi}{3}\right)$ maka dipetakan ke $w = 8\ cis\ \pi$.

Pada umumnya, di bawah (1), suatu sinar yang dipancarkan dari pusat sumbu koordinat dengan suatu sudut iklinasi α dipetakan menjadi suatu sinar yang bersudut inklinasi $n\alpha$. Suatu sektor lingkaran dengan jari-jari r bersudut pusat ϕ ditransformasian ke sektor lingkaran dengan jari-jarir^n bersudut pusat $n\phi$. Sebagai akibat, misalnya, di bawah $w = z^2$,kuadran pertama bidang *z* dipetaakan ke setengah lingkaran atas bidang w, setengah lingkaran atas bidang *z* dipetakan ke seluruh bidang *w*, dan jika kita mengambil seluruh bidang *z* maka kita akan menutupi bidang *w* dua kali. Lagi, dengan megeneralisasikan kasus khusus, kita melihat bahwa di bawah transformasi pangkat $w = z^n$,bidang *z* dipetakan ke bidang *w*, *n* kali, yaitu setiap titik pada bidang *w* kecuali *w* = 0 merupakan bayangan *n* titik berbeda dari bidang *z*. kenyataan ini, tentu saja merupakan ungkapan geometrik terhadap kenyataan bahwa setiap bilangan bukan nol mempunyai *n* akar berbeda.(Perhatikan !)





Gambar 1. Transformasi $w = z^n$

Contoh:

Di bawah fungsi $w = z^4$, petakan titik $P = 1 + i$ ke bidang-w dengan domain $A = \left\{z : |z| < 1, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\right\}$!

Jawab:

$|P| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$|P'| = (\sqrt{2})^4 = 4$

Tuliskan $P' = a + ib$. Daerah pada bidang-z dipetakan menjadi $A' = \{w: |w| < 1, 0 \leq \arg w \leq \pi\}$ pada bidang-w, kita dapatkan

$$\sin\theta = 0$$

$$\frac{b}{|P'|} = 0$$

$$\frac{b}{4} = 0$$

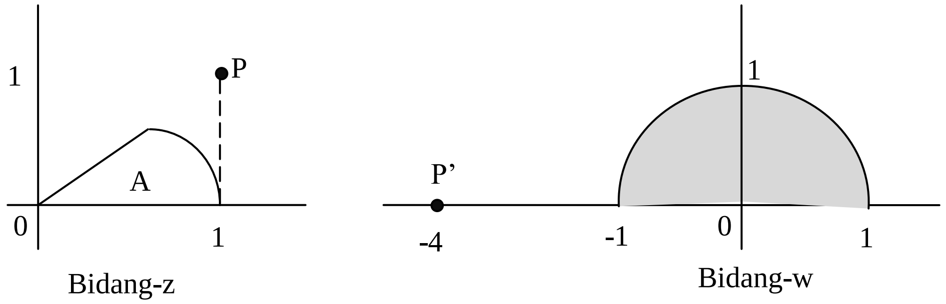
Kita dapatkan $b = 0$. Analog dengan cara di atas, kita dapatkan

$$\cos\theta = -1$$

$$\frac{a}{4} = -1$$

$$a = -4$$

Jadi di dapat $P' = -4 + 0i = -4$ seperti gambar di bawah ini.



Non Contoh:

Di bawah fungsi $w = z$, petakan titik $P = 1 + i$ ke bidang-w dengan domain $A = \left\{z: |z| < 1, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\right\}$!

Jawab:

$|Q| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$|Q'| = \sqrt{2}$

Tuliskan $P' = a + ib$. Daerah pada bidang-z dipetakan menjadi $A' = \left\{w: |w| < 1, 0 \leq \arg w \leq \frac{\pi}{4}\right\}$ pada bidang-w, kita dapatkan

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{b}{|Q'|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

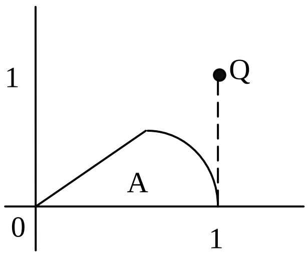
Kita dapatkan $b = 1$. Analog dengan cara di atas, kita dapatkan

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

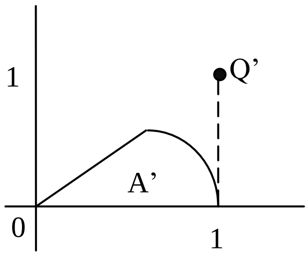
$$\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a = 1$$

Jadi di dapat $P' = 1 + i$ seperti gambar di bawah ini.



Bidang-z

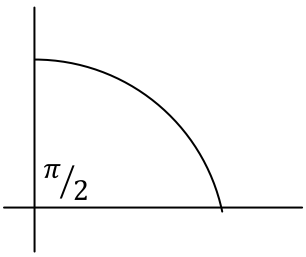


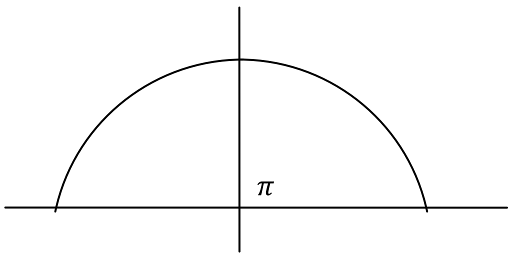
Bidang-w

Soal:

1. Carilah bayangan sektor $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ di bawah $w = z^2$!

   Jawab:
   Karena $n = 2$ maka di dapat $0 < \arg z < \pi$.





2. a. Dengan menggunakan kenyataan bahwa uraian fungsi kuadrat $w = z^2$ menghasilkan $u = x^2 - y^2$ dan $v = 2xy$, tunjukkan bahwa untuk fungsi ini $v^2 = 4x^2(x^2 - u) = 4y^2(u + y^2)$

b. Gunakan hasil dari a untuk menunjukkan bahwa, dibawah $w = z^2$ garis-garis mendatar ($y = k \neq 0$) dan tegak lurus ($x = c \neq 0$) dipetakan menjadi parabola.

Jawab:

a) $u = x^2 - y^2$

$v = 2xy$

$v^2 = 4x^2y^2$

$v^2 = 4x^2(x^2 - x^2 + y^2)$

$= 4x^2(x^2 - u)$

$v^2 = 4y^2(x^2 - y^2 + y^2)$

$= 4y^2(u + y^2)$

Jadi $v^2 = 4x^2(x^2 - u) = 4y^2(u + y^2)$..1)

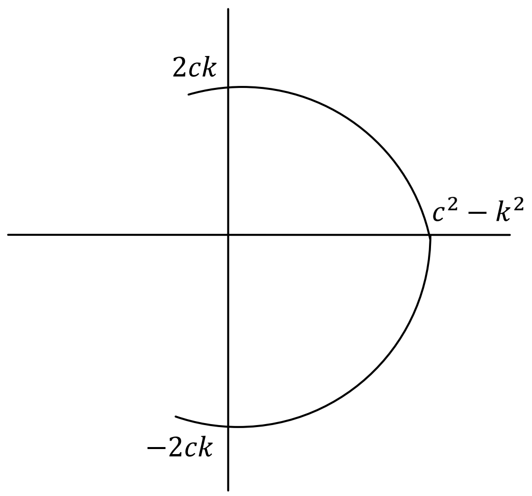
b) Misal $x = c$ dan $y = k$. Substitusikan ke persamaan 1), di dapat

$v^2 = 4c^2(c^2 - c^2 + k^2)$

$= 4c^2k^2$

$v = \pm 2ck$

$u = c^2 - k^2$



Jadi garis-garis mendatar ($y = k \neq 0$) dan tegak lurus ($x = c \neq 0$) dipetakan menjadi parabola.